

طرح درس: مبانی هندسه دیفرانسیل

مشخصات کلی درس

عنوان درس مبانی هندسه دیفرانسیل (Foundations of Differential Geometry)

تعداد واحد ۴ واحد (نظری - حل تمرین)

مقطع تحصیلی کارشناسی

نوع درس تخصصی الزامی

پیش‌نیاز ریاضیات عمومی ۲

مدرس دکتر کوکبی

زمان کلاس [یکشنبه 10-12 سه شنبه 8-10]

مکان کلاس [115]

۱. توصیف و هدف کلی درس

هیچ شاخه‌ای از ریاضیات به اندازه هندسه، قوه تجسم را تقویت نمی‌کند. با توجه به اهمیت این موضوع، ترسیم و تحلیل شکل‌های درست و دقیق در متن درس ضروری است. هدف بنیادین این درس، تفهیم عمیق «بُعد فضا» و تعریف دقیق آن به عنوان لازمه درک پدیده‌های طبیعی است.

بسیاری از دانشجویان به دلیل عدم درک صحیح از بُعد، دایره (یک خم یک‌بعدی) را دوی‌بعدی و کره (رویه دوی‌بعدی) را سه‌بعدی می‌پندارند. این درس با هدف رفع این نقیصه طراحی شده و به دانشجویان امکان می‌دهد مفاهیم آنالیز ریاضی را روی خم‌های یک‌بعدی و رویه‌های دوی‌بعدی در فضای اقلیدسی به کار گیرد. تمرکز اصلی بر مطالعه موضعی اشیاء هندسی در همسایگی نقاط و سپس تعمیم آن به خواص سراسری است.

۲. اهداف یادگیری (Learning Outcomes)

پس از پایان این دوره، دانشجو باید بتواند:

۱. تفاوت بنیادین میان یک شیء هندسی (مانند کره) و فضای محیطی آن را درک کرده و بُعد توپولوژیک را از بُعد فضای اقلیدسی تمیز دهد.

۲. خم‌های پارامتری را در فضای سه‌بعدی تحلیل کرده، طول قوس، انحنا و تاب آن‌ها را محاسبه کند.

۳. دستگاه فرنه-سره (Frenet-Serret) را برای تحلیل رفتار موضعی خم‌ها به کار گیرد.

۴. مفهوم رویه منظم را درک کرده و قادر به تشکیل قطعات مختصاتی (Coordinate Patches) باشد.

۵. مفاهیم مشتق‌پذیری، صفحه مماس و نگاشت‌های دیفرانسیل‌پذیر را روی رویه‌ها پیاده‌سازی کند.

۶. انحنا و گوسی و انحنا میانی را محاسبه کرده و تعبیر هندسی آن‌ها را بیان کند.

۷. قضیه ذاتی گاوس (Theorema Egregium) را اثبات و اهمیت آن در استقلال هندسه از فضای محیطی را تشریح نماید.

۸. (اختیاری) از نرم افزارهای محاسباتی مانند Maple یا Mathematica برای تجسم رویه‌های پیچیده و محاسبه کمیت‌های هندسی استفاده کند.

۳. روش تدریس

- سخنرانی و تدریس مفاهیم نظری با تأکید بر شهود هندسی.

- حل مسائل نمونه در کلاس برای تثبیت مفاهیم محاسباتی.

- استفاده از ابزارهای کمک آموزشی بصری (در صورت امکان نرم افزارهای ریاضی) برای نمایش رویه‌ها و خم‌ها.

- برگزاری جلسات حل تمرین برای رفع اشکالات دانشجویان.

۴. وظایف دانشجو

- حضور منظم و فعال در جلسات درس و شرکت در مباحث کلاس.

- مطالعه منابع معرفی شده پیش از هر جلسه.

- حل تمرینات تحویلی به صورت هفتگی و ارائه منظم آن‌ها.

- (در صورت تعریف) انجام پروژه محاسباتی با نرم افزار برای تجسم هندسی.

۵. شیوه ارزشیابی

روش ارزیابی سهم از نمره کل (پیشنهادی) توضیحات

---: ---: ---:

حل تمرین و فعالیت کلاسی ۳ نمره شامل تحویل تمرینات هفتگی و مشارکت در کلاس

آزمون میان‌ترم ۶ نمره تا پایان مبحث نظریه موضعی خم‌ها

پروژه (اختیاری/اجباری) ۲ نمره استفاده از Maple/Mathematica یا مقاله کوتاه

آزمون پایان‌ترم ۹ نمره شامل تمام مباحث با تأکید بر نظریه رویه‌ها

جمع کل ۲۰ نمره

۶. زمان‌بندی جلسات (تقویم آموزشی)

تذکر: این زمان‌بندی برای یک نیمسال ۱۶ هفته‌ای (دو جلسه در هفته) تنظیم شده است.

هفته رئوس مطالب و سرفصل‌ها فعالیت‌های دانشجو

---: ---: ---:

یکم معرفی درس، مفهوم فضا و بُعد، یادآوری جبرخطی و آنالیز برداری، تعریف خم پارامتری در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ مطالعه مقدمات

دوم خم‌های منظم، تغییر پارامتر، تعریف طول قوس و پارامترسازی با طول قوس. حل تمرینات بخش خم‌ها

سوم تعریف انحنا (Curvature)، بردار یکه مماس و بردار یکه قائم، دایره بوسان. تمرین محاسبه طول قوس

چهارم تعریف تاب (Torsion)، بردار یکه قائم دوم، فرمول‌های فرنه-سره و تعبیر هندسی آن‌ها. محاسبه کنج فرنه

پنجم نظریه موضعی خم‌ها، قضیه اساسی خم‌های فضایی، صورت متعارف موضعی خم. تمرینات اثباتی فرنه

ششم خواص سراسری خم‌های مسطح (قضیه چهار رأس، نابرابری ایزوپریمتری)، خم‌ها در فضای اقلیدسی دلخواه. تمرینات خواص سراسری

هفتم معرفی رویه: تعریف زیرمجموعه باز در صفحه، قطعه مختصاتی، تعریف رویه منظم، مثال‌های کره، استوانه و توروس. بررسی منظم بودن رویه‌ها

هشتم نگاره وارون مقادیر منظم، تغییر پارامتر در رویه‌ها، توابع مشتق‌پذیر روی رویه. آزمون میان‌ترم

نهم صفحه مماس بر رویه، دیفرانسیل نگاشت بین رویه‌ها، تعریف متر ریمانی (اولین صورت بنیادی). محاسبه صفحه مماس

دهم محاسبه ضرایب فرم اول بنیادی، طول خم روی رویه، زاویه بین خم‌ها روی رویه، مفهوم مساحت رویه. محاسبه مساحت و طول

یازدهم جهت‌دهی رویه (Orientation)، رویه‌های جهت‌پذیر و جهت‌ناپذیر (نوار موبیوس)، مشخصات رویه‌های فشرده. تمرینات فرم اول

دوازدهم نگاشت گاوسی (Gauss Map) و خواص بنیادی آن، تعریف عملگر شکل (Shape Operator) تحلیل نگاشت گاوس

سیزدهم انحناهای گاوسی (K) و انحناهای میانگین (H)، تعبیر هندسی انحناهای گاوسی، نقاط بیضوی، هذلولوی و سهموی. محاسبه انحناهای اصلی

چهاردهم میدان‌های برداری روی رویه، مشتق همگرد (Covariant)، قضیه ذاتی گاوس (Theorema Egregium) اثبات‌های مربوط به K

پانزدهم معادلات کودانتزی-مایناردی، قضیه بونه (Bonnet)، آشنایی مقدماتی با ژئودزیک‌ها (به عنوان خطوط راست روی رویه). تمرینات خواص ذاتی

شانزدهم رویه‌های خطکشی شده (Ruled Surfaces)، رویه‌های مینیمال ($H=0$)، جمع‌بندی و استفاده از نرم‌افزار (در صورت ارائه). رفع اشکال و مرور

۷. فهرست منابع

1. Do Carmo, M. P. (2016). Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Publications. (اصلی پیشنهادی)

2. Pressley, A. (2010). Elementary Differential Geometry. Springer Undergraduate Mathematics Series.

3. Abate, M., & Tovena, F. (2012). Curves and Surfaces. Springer.

4. منبع مکمل کلاسیک) O'Neill, B. (2006). Elementary Differential Geometry. Academic Press. (
5. Shifrin, T. (2016). Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces.
6. Rovenski, V. (2000). Geometry of Curves and Surfaces with MAPLE. (برای بخش محاسبات نرم افزاری)